0.1 Brücken zwischen Aussagen- und Prädikatenlogik

Zur Induktion über den Formelaufbau genügt die Betrachtung der Fälle

... in der Aussagenlogik		... zusätzlich in der Prädikatenlogik	
		$\cancel{\varphi \equiv p_i}$	keine einzelnen Variablen
$\varphi \equiv p_i$	Variable	$\varphi \equiv t_0 = t_1$	Gleichheit zwischen Termen
$\varphi \equiv \neg\psi$	Negation	$\varphi \equiv R(t_0, ..., t_{n-1})$	n-stellige Relation
$\varphi \equiv \psi \to \theta$	Implikation	$\varphi \equiv \forall x \psi$	Universal-Quantor

Zur Induktion über einen Σ-Beweis $\varphi^0, ..., \varphi^{n-1}$ von φ genügt die Betrachtung der Fälle

... in der Aussagenlogik		... zusätzlich in der Prädikatenlogik	
φ_i	ist Axiom	φ_i	ist Quantoren-Axiom
φ_i	$\in \Sigma$	$\varphi_i \equiv \forall x \varphi_j$	für $j < i$, Generalisierung
$\varphi_j \equiv \varphi_l \to \varphi_i$	für $j, l < i$, Modus Ponens		

Es folgt eine Übersicht wichtiger Theoreme und Lemmata aus der Vorlesung *Einführung in die mathematische Logik* bei A. Baudisch. Darin ist μ stets eine aussagenlogische Formel, Σ ist eine Menge von Aussagen, Σ_0 ist stets eine endliche Menge, und M ist wechselweise eine Belegung bzw. ein Modell (außer in 6.5). Die Mächtigkeit einer Sprache L ist $|L| := \begin{cases} \aleph_0 & |\sigma(L)| \leq \aleph_0 \\ |\sigma(L)| & \text{sonst} \end{cases}$.

6.5 $\vdash \mu \Rightarrow \models \mu_{\ldots\varphi_i(\bar{x})/p_i\ldots}$ $\diamondsuit$ Für ein fixiertes $\bar{a}$ aus einem Modell M definiert man eine Belegung $B_{M,\bar{a}}(p_i) := \begin{cases} \top & M \models \varphi_i(\bar{a}) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$. Für eine aussagenlogische Formel χ zeigt man $B^*_{M,\bar{a}}(\chi) = \top \leftrightarrow M \models \chi_{\ldots\varphi_i(\bar{a})/p_i\ldots}$. Ist inbesondere $\chi \equiv \mu$ eine Tautologie folgt die Behauptung, weil $B^*_{M,\bar{a}}(\mu) = \top$ für beliebiges $\bar{a}$.

6.9 $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi \to \psi(\bar{x})$ $\boxed{\text{Deduktionstheorem fürs Folgern}}$ $\diamondsuit$ Definition von $\models$ bedenken.

3.2, 7.1 $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$ $\diamondsuit$ Ein $M \models \Sigma$ wird induktiv durch den Σ-Beweis von φ geführt.

7.4 $\vdash \mu \Rightarrow \vdash \mu_{\ldots\varphi_i/p_i\ldots}$ $\diamondsuit$ In einem aussagenlogischen Beweis $\mu^0, ..., \mu^{n-1}$ von μ nimmt man in jedem Schritt $\mu^j_{\ldots\varphi_i/p_i\ldots}$ Substitution vor. So erhält man 1:1 einen prädikatenlogischen Beweis für $\mu_{\ldots\varphi_i/p_i\ldots}$.

3.3, 7.6 $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi$ $\boxed{\text{Deduktionstheorem, Herbrand}}$ $\diamondsuit$ Ein $\Sigma \cup \{\varphi\}$-Beweis von ψ wird induktiv zu einem Σ-Beweis von $\varphi \to \psi$ modifiziert.

3.6, 7.8i $\Sigma \vdash \varphi$ und $\Sigma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \psi$ für alle ψ $\diamondsuit$ Man benutze $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ und die Tautologie $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

3.7, 7.8ii $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent $\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$ $\diamondsuit$ Wegen 7.8i $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, danach benutze man 7.6 und Modus Ponens mit der Tautologie $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

7.8iii Σ konsistent $\Leftrightarrow$ alle $\Sigma_0 \subset \Sigma$ konsistent $\diamondsuit$ $\Rightarrow$: Leicht. $\Leftarrow$: Durch Widerspruch. Die Σ-Beweise für φ und $\neg\varphi$ benutzen nur eine Σ_0 Formelmenge.

3.8, 7.11 Σ konsistent $\Rightarrow \Sigma$ erweiterbar zu $\left\{ \begin{array}{ll} \text{3.8} & \text{vollständigen} \\ \text{7.11} & \text{max. konsistenten} \end{array} \right\} \Sigma^+ \supset \Sigma$ $\boxed{\text{Lindenbaum}}$ $\diamondsuit$ Zu 3.8: Aufzählung aller Formeln $\varphi^0, \varphi^1, \ldots$; füge zu Σ^+ jede Formel φ^i hinzu, die bisher erweitertes Σ konsistent läßt, ansonsten füge $\neg\varphi^i$ hinzu. Zu 7.11: Definiere kanonische Halbordnung für die Menge $A := \{\Delta : \Sigma \subset \Delta \text{ konsistent}\}$. Zeige für eine Kette X in A, daß jede endliche Teilmenge von $\bigcup_{\Delta\in X}\Delta$ konsistent ist; mit 7.8iii folgt die Konsistenz von $\bigcup_{\Delta\in X}\Delta$. Nach Zorn's Lemma existiert in A ein maximales Element Σ^+.

3.9, 8.3 Σ konsistent $\Leftrightarrow \exists M$ mit $M \vDash \Sigma$ $\Diamond$ $\Leftarrow$: Leicht durch Widerspruch. $\Rightarrow$: oBdA $\Sigma = \Sigma^+$. Zu 3.9: Man definiert eine Belegung $M(p) := \begin{cases} \top & \Sigma\vdash p \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$ und führt M induktiv durch den Formelaufbau. Zu 8.3: Prinzip ähnlich; man erweitere die Sprache L um eine Konstantenmenge C (wobei $|C| = |L|$), so daß C Henkins-Erfüllungsmenge für Σ ist. Es gibt dann ein Modell M, dessen Repräsentanten die Symbole aus C sind. Insbesondere **8.4** Σ konsistent $\Leftrightarrow \exists M$ mit $M \models \Sigma$ und $|M| \leq |L|$ $\boxed{\text{Löwenheim-Skolem}}$

3.10, 8.5 $\Sigma \vDash \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$ $\boxed{\text{Vollständigkeitssatz, Gödel}}$ $\Diamond$ Aus $\Sigma \vDash \varphi$ folgt $M \vDash \Sigma \rightarrow M \vDash \varphi$. D.h. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ besitzt kein Modell (ist nicht erfüllbar), mit 8.3 ist $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ also inkonsistent. Aus 7.8ii folgt $\Sigma \vdash \varphi$.

3.11, 8.6 $\exists M$ mit $M \vDash \Sigma \Leftrightarrow \forall \Sigma_0 \subset \Sigma$ existiert $M \vDash \Sigma_0$ $\boxed{\text{Endlichkeitssatz}}$ $\Diamond$ $\Rightarrow$: Leicht. $\Leftarrow$:

$$\begin{array}{lcl} M \vDash \Sigma_0 & & M \vDash \Sigma \\ \Downarrow 8.3 & & \Uparrow 8.3 \\ \Sigma_0 \text{ konsist.} & \xrightarrow{7.8\text{iii}} & \Sigma \text{ konsist.} \end{array}$$

8.7 $\forall c \in \mathbb{N}$ $M \models \Sigma$ und $|M| > c \Rightarrow \forall \lambda \geq |L|$ existiert $M \models \Sigma$ und $|M| = \lambda$ $\boxed{\text{Löwenheim-Skolem aufwärts}}$ $\Diamond$ Man erweitere die Sprache L um eine Konstantenmenge $D = \{d_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Mit 8.6 um ein $M \models \Sigma \cup \{d_\alpha \neq d_\beta : a < \beta < \lambda\}$ bemühen und 8.4 verhilft zu $|M| \leq \lambda$. Gleichheit folgt aus $d_\alpha \neq d_\beta$.

11.1 Sei $P(\cdot,\cdot)$ ein zweistelliges Prädikat. Das Prädikat $Q(a) \leftrightarrow \neg P(a,a)$ ist nicht von der Form $P(a',\cdot)$. $\boxed{\text{Diagonallemma, Cantor}}$ $\Diamond$ Angenommen $Q(\cdot) \leftrightarrow P(a',\cdot)$, dann folgt $P(a',a') \leftrightarrow Q(a') \leftrightarrow \neg P(a',a')$.

11.★ In der Sprache L mit der Signatur $\sigma(L) = (S, +, \cdot, 0, <)$ und der Theorie $T = \mathrm{Abl}(\Sigma)$ mit $N \subset T$ ist Thm_Σ, die Menge der beweisbaren Aussagen, nicht rekursiv. $\boxed{\text{Unvollständigkeitssatz, Gödel}}$ $\Diamond$ In einer Aufzählung aller Formeln $\varphi^0(z), \varphi^1(z), \ldots$ in einer Variable definiert man das zweistellige Prädikat $P(i,j) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} N \vDash \varphi^i_{k_j/z} \leftrightarrow \mathrm{Thm}_\Sigma(\mathrm{Sub}(\ulcorner\varphi^i\urcorner, \ulcorner z\urcorner, \mathrm{Num}\ j)) \leftrightarrow \exists p\ \mathrm{Pr}_\Sigma(\ulcorner\varphi^i_{k_j/z}\urcorner, p)$. Alle rekursiven Prädikate sind von der Form $P(i,\cdot)$, also ist mit 11.1 $\neg\mathrm{Thm}_\Sigma(\mathrm{Sub}(j, \ulcorner z\urcorner, \mathrm{Num}\ j))$ nicht rekursiv. Insbesondere folgt, daß Thm_Σ nicht rekursiv ist.

References:

B. Schümann - Vorlesungsmitschrift, `www.informatik.hu-berlin.de/~schueman/LogikSk.pdf`

W. Rautenberg - Einführung in die math. Logik, SK 130 R247