Algebro-Differentialgleichungen

Quasilineare differentiell-algebraische Systeme

Zu Anfang einige Bemerkungen

Die Konventionen $x,\ x_0,\ x' \in \mathbb{R}^d,\ x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ mit $y,\ y_0,\ y' \in \mathbb{R}^r,\ z,\ z_0,\ z' \in \mathbb{R}^{d-r}$ sollen uns an einigen Stellen ermöglichen Urbild- und Bildbereich einer Funktion nicht zu notieren.
Manchmal sind die Koordinaten einer DGL statt aus $\mathbb{R}^d$ besser aus $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ zu verstehen. Dann ist es wichtig, daß auch die Anfangsbedingungen für die fragliche DGL in Ω liegen. Der Einfachheit halber arbeiten wir nur mit $\mathbb{R}^d$.
Mit $U(x_0)$ meinen wir eine (evtl. geschickt gewählte) offene Umgebung um x_0.
Wir suchen ja meistens eine Kurve $x : (a,\ b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ mit $t \mapsto x(t)$, dann ist $x' : (a,\ b) \to \mathbb{R}^d$ auch zu verstehen als $t \mapsto \frac{\partial x}{\partial t} = (\frac{\partial x_i}{\partial t}\ |_t)_{i=1 \ldots d}$. Wir verlangen, daß $0 \in (a,\ b)$ und die Anfangswerte an $x(0)$ definiert werden. Der Definitionsbereich der Kurven wird auch mit $I := (a,\ b)$ bezeichnet.
Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, dann ist $\mathrm{d}f\ |_x : T_x\,\mathbb{R}^d \to T_{f(x)}\,\mathbb{R}^k$ jene lineare Abbildung, deren Wirkung durch die Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ |_x\right)_{i=1 \ldots k,\, j=1 \ldots d} \in \mathbb{R}^{k \times d} \text{ beschrieben ist.}$$

Multiplikationen, die Tensoren von Rang 3 involvieren, sind mit . statt $\cdot$ gekennzeichnet. In unserem Text ist beispielsweise $\mathrm{d}_x\, B(x)$ ein Tensor von Rang 3.

Minimale vs. Redundante Formulierung von DGLs

• Minimale Koordinaten:

dgl.1: $y' = f(y)$ mit $y(0) := y_0$.

Nach ⟨Lemma 2.6 in [DB02]⟩:

$f\ |_{U(y_0)}$ und $\mathrm{d}f\ |_{U(y_0)}$ stetig

$\Longrightarrow$ $f\ |_{U(y_0)}$ (lokal?) Lipschitz-stetig

$\Longrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit einer Lösungskurve um 0

• Redundante Koordinaten:

dgl.2: $\begin{matrix} y' & = & f(y,\ z) \\ 0_{d-r} & = & g(y,\ z) \end{matrix}$ mit $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, so daß $0_{d-r} = g(y_0,\ z_0)$

darin ist $g : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{d-r} \to \mathbb{R}^{d-r}$. Nach dem ⟨Satz über implizite Funktionen⟩:

$g_z\,(y,\ \circ) : T_z\,\mathbb{R}^{d-r} \to T_{g(y,z)}\,\mathbb{R}^{d-r}$ invertierbar für $y \in U(y_0)$

$\Longrightarrow$ $\exists\ g^{\sim}$ mit $z = g^{\sim}(y,\ 0_{d-r}) =\ : h(y)$

Die Funktion $h : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{d-r}$ kann durchaus vom Startwert y_0 abhängen, aber sie ermöglicht zumindest lokal, dgl.2 nach dgl.1 zu überführen:
$\simeq$dgl.1: $y' = f(y,\ h(y))$ mit $y(0) := y_0 \in \mathbb{R}^r$. Hierfür haben wir ja Existenz und Eindeutigkeit einer Lösungskurve um 0 diskutiert.
Eine gute Anschauung für die Differentiation ist, daß der Tangentialvektor der Kurve stets orthogonal zu den Gradienten der impliziten Funktionen $g_i(y,\ z)$ sei muß. Diese Bedingungen $\mathrm{d}g_i(y,\ z)\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$ für $i = 1,\ \ldots,\ d - r$ ersetzen dann den unteren Matrixteil, schematisch:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y,\ z) \\ g(y,\ z) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ \mathrm{d}g & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y,\ z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Falls $g_z\,(y,\ \circ)$ singulär ist, läßt sich evtl. durch erneutes Differenzieren der verbliebenen algebraischen Anteile eine Systemmatrix mit vollem Rang erhalten.

• Beispiel 1:

dgl.2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z^2 \\ y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{!}{\in} \left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \end{pmatrix}$.

Die implizite Gleichung darin ist $g(y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Wegen $g_z(y, z) = 2\,z$ haben wir etwa für $z > 0$ die Relation $z = \sqrt{1 - y^2} =: h(y)$.

$\simeq$dgl.1 $y' = y + z^2 = y + h(y)^2 = y + 1 - y^2$ mit $y(0) := \frac{1}{2}$.

Mathematica liefert $y[t] \to \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\ \mathrm{Tanh}\left[\frac{\sqrt{5}\,t}{2}\right]\right)$. Der Definitionsbereich der Lösungskurve $t \mapsto (y[t], z[t])$ ist $t \in \left(-\infty, \frac{2}{\sqrt{5}}\ \mathrm{ArcTanh}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 0.4304\,...\right)$

■ Quasi-lineare Formulierung von DGLs

Exkurs: B^+ ist die Moore-Penrose-Inverse zu einer $k \times d$ Matrix B. Durch die folgenden Eigenschaften ist B^+ eindeutig zu B zugeordnet:

• $B\,B^+\,B = B$ • $B^+\,B\,B^+ = B^+$ • $B^+\,B$ und $B\,B^+$ symmetrisch.

Die numerische Bestimmung von B^+ erfordert Methoden wie die Singular value decomposition in [MA01]:
$[U, S, V] = \mathrm{SVD}(X)$ produces a diagonal matrix S, of the same dimension as X and with nonnegative diagonal elements in decreasing order, and unitary matrices U and V so that $X = U\,S\,V'$.

Wegen $B\,B^+\,B = B$ kann man

• $Q = B^+\,B$ mit $Q: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ als Projektor von $\mathbb{R}^d$ nach $\ker^\perp B$, und ähnlich

• $P = B\,B^+$ mit $P: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ als Projektor von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathrm{im}\,B$ identifizieren.

Die Abbildungen $Q^\perp = \mathrm{Id} - Q$ und $P^\perp = \mathrm{Id} - P$ projezieren die Räume in den jeweiligen Nullraum der Abbildungen Q und P.

Im Folgenden ist $B: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{k \times d}$ nicht notwendigerweise eine konstante linare Abbildung, obwohl wir sie als solche notieren. Die differentiellen bzw. algebraischen Anteile des Systems

dgl.3 $B\,x' = f \qquad x(0) = x_0$

trennt man unter Verwendung der obigen Projektionen als Summe: $x' = Q\,x' + Q^\perp\,x'$.

• Differentieller Anteil: Für den ersten Summand findet man

eqs.1 $B^+\,B\,x' = Q\,x' = B^+\,f$

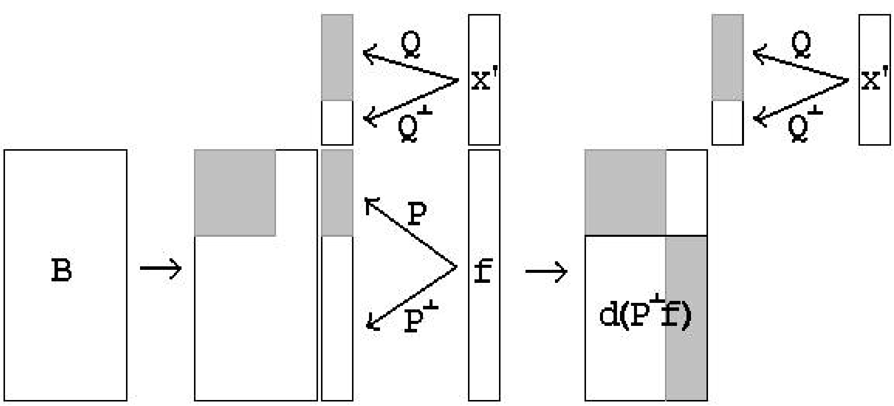
Weil Q den gleichen Rang hat wie B, ist x' in eqs.1 eindeutig bestimmt unter der zusätzlichen Forderung $Q^\perp\,x' = 0$.

• Algebraischer Anteil: Wegen $P^\perp\,B = (I - B\,B^+)\,B = 0$ muß $P^\perp\,B\,x' = P^\perp\,f = 0_k$ gelten.

⟨Satz 2.31⟩ in [DB02] lautet wie folgt: Die Eindeutigkeit der Lösungskurven ähnlich wie bei dgl.2 ist bedingt an

• $\mathrm{rank}\,B = \mathrm{rank}\,Q =: r \le d$ • $\mathrm{rank}\,\mathrm{d}(P^\perp\,f)\,Q^\perp = d - r$.

Für das Differential gilt im übrigen $\mathrm{d}(P^\perp\,f) = P^\perp\,(\mathrm{d}f - \mathrm{d}B.B^+\,f)$. Im Beispiel 1, enspricht $\mathrm{d}(P^\perp\,f)\,Q^\perp = 2\,z$.



• Beispiel 2:

dgl.3 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \\ -1 - \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}$ mit $x_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Anhand den geforderten Eigenschaften und Definitionen prüft man leicht, daß

$B^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = B^+ B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^\perp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• Der differentielle Anteil ist bestimmt durch $Q\,x' = B^+ f$, hier

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2x_2 + 2x_1\left(1 + \sqrt{2}\,x_2\right) \\ -\sqrt{2} + 2x_2 - 2x_1\left(1 + \sqrt{2}\,x_2\right) \end{pmatrix}$

und reduzierbar zu $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2x_2 + 2x_1\left(1 + \sqrt{2}\,x_2\right)\right)$.

• Der algebraische Anteil ist bestimmt durch

$P^\perp f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ebenfalls äquivalent zu einer einzelnen Gleichung, nämlich $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

• Bemerkung: Beispiel 2 ist generiert aus Beispiel 1. Wir nehmen

dgl.2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z^2 \\ y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

und führen eine Koordinatentransformation durch:

Es soll gelten $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, oder äquivalent $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Wir substituieren mit $y \to \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ und $z \to \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$.

$\simeq$dgl.3 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \\ -1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt das äquivalente System.

Motivation: Im vorigen Vortrag sind wir von einer Lösungskurve für dgl.2 ausgegangen und haben die implizite Gleichung folgendermaßen differenziert:

$$\frac{d}{dt}(g(y[t], z[t])) = dg(y, z)\,|_{(y[t],z[t])}.(y'[t], z'[t]) = \begin{pmatrix} g_y & g_z \end{pmatrix}(y, z)\,|_{(y[t],z[t])}.(y'[t], z'[t])$$

$$= g_y(y[t], z[t]) \cdot y'[t] + g_z(y[t], z[t]) \cdot z'[t] \overset{!}{=} 0$$

Es ergibt sich bei Invertierbarkeit von g_z gerade $z'[t] = -g_z^{-1} \cdot g_y \cdot y'[t]$. Im Beispiel 1 entspricht das gerade $z' = -\frac{2y}{2z}\,y'$.

Verfahren wir nun für Systeme vom Type dgl.3 analog: Nehmen wir an, wir verfügen über eine Lösungskurve $t \in I \mapsto (x[t], w[t])$ mit

eqs.2 $g(x, w) = B(x) \cdot w - f(x) = 0$ für alle $t \in I$.

Zur besseren Übersicht haben wir als neue Variable bzw. Funktion geschrieben: $w = x'$.

Wir berechnen: $dg\,|_{(x[t],w[t])} = \begin{pmatrix} g_x & g_w \end{pmatrix}|_{(x[t],w[t])} = \begin{pmatrix} d_x B(x).w - d_x f(x) & B(x) \end{pmatrix}|_{(x[t],w[t])}$.

Die Gleichung $\frac{d}{dt}(g(x[t], w[t])) = \begin{pmatrix} d_x B(x).w - d_x f(x) & B(x) \end{pmatrix}|_{(x[t],w[t])}.(x'[t], w'[t])$ vereinfacht sich zu

$$(d_x B(x).w - d_x f(x)) \cdot x' + B(x) \cdot w' = 0 \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Berücksichtigt man nun noch $w = x'$, wird klar, daß wir linearisiert ein System der Form

dgl.4 $-A \cdot w + B \cdot w' = 0$ mit $A = (d_x f(x) - d_x B(x).w)$ untersuchen.

Nehmen wir im weiteren an, daß B (und dann ebenso A) eine $d \times d$ Matrix ist. Seien außerdem die Rangbedingung

• rank $B = : r \le d$ • rank A = rank $P^\perp(df - dB.B^+ f)\,Q^\perp = d - r$ erfüllt.

Nach Satz 2.31 ist dann die Lösungskurve $t \in I \mapsto (x[t], w[t])$ von eqs.2 eindeutig. Die Eindeutigkeit der Lösung überträgt sich auf das System dgl.4. Dann ist also zu

dgl.4 $\quad -A\,w + B\,w' = 0 \qquad w(0) = 0$

die eindeutige Lösung $w^* \equiv 0$. Zu diesen Matrizen läßt sich der folgende Satz finden:

⟨Satz 2.33⟩ aus [DB02]: $\{B - \tau\,A\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ ist ein reguläres Matrizenbüschel, d.h. es gibt ein $\tau \in \mathbb{R}$, so daß die Matrix $B - \tau\,A$ invertierbar ist.

Beweis: Angenommen $B - \tau\,A$ ist für jede Wahl von τ singulär. Dann verschwindet das Polynom $\chi(\tau) = \,|\,B - \tau\,A\,|\, \equiv 0$. Also finden wir für eine Auswahl $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_d < \tau_{d+1}$ einzelne Vektoren v_i in den Kernen der $d + 1$ Abbildungen

$$(B - \tau_i\,A)\,v_i = 0_d \text{ für } i = 1, \ \ldots, d + 1.$$

Dazu finden wir eine nicht triviale Linearkomination, so daß $\sum_{i=1}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i = 0_d$, also mit $\alpha \neq 0_d$. Die Funktion $w(t) = \sum_{i=1}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i \cdot \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_i}\,t\right]$ erfüllt dgl.4, ersichtlich durch einfaches Nachrechnen. Nun zeigen wir $w(t) \not\equiv 0$. Sei i_0 der kleinste Index für den $\alpha_{i_0} \neq 0$. Wegen $\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i_0}}\right) < 0$ finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t > T$ der Ausdruck

$$\left|\sum_{i>i_0}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i \cdot \mathrm{Exp}\left[\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i_0}}\right)t\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies hilft uns in der Abschätzung

$$|\,w(t)\,| = \left|v_{i_0} \cdot \alpha_{i_0} \cdot \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_{i_0}}\,t\right] + \sum_{i>i_0}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i \cdot \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_i}\,t\right]\right| = \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_{i_0}}\,t\right]\left|v_{i_0} \cdot \alpha_{i_0} + \sum_{i>i_0}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i \cdot \mathrm{Exp}\left[\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i_0}}\right)t\right]\right|$$

$$\geq \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_{i_0}}\,t\right]\left(\underbrace{|\,v_{i_0} \cdot \alpha_{i_0}\,|}_{=:\varepsilon>0} - \left|\sum_{i>i_0}^{d+1} v_i \cdot \alpha_i \cdot \mathrm{Exp}\left[\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i_0}}\right)t\right]\right|\right) \geq \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_{i_0}}\,t\right](\varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2}) = \mathrm{Exp}\left[\frac{1}{\tau_{i_0}}\,t\right]\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

Zugleich ist das ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung w^*. Daher hat das Polynom $\chi(\tau)$ nicht mehr als d reelle Nullstellen und $B - \tau\,A$ ist fast überall invertierbar. □

Benutzt wird dieser Sachverhalt, um sich zu vergewissern, daß man lokal zum linearisierten System dgl.4 übergehen kann. Das ist nur dann sinnvoll (wegen Eindeutigkeit), wenn numerische Test ergeben, daß das Matrizenbüschel $\{B - \tau\,A\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ regulär ist.

■ References

DB94 - Peter Deuflhard, Folkmar Bornemann: Numerische Mathematik II, 1. Auflage

DB02 - Peter Deuflhard, Folkmar Bornemann: Numerische Mathematik II, 2. Auflage

MA01 - Matlab Version 6.1